



## Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapă locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a V-a

Barem de notare și evaluare

**Problema 1.** Un număr natural se numește *inteligent* dacă este și pătrat perfect și cub perfect. Se consideră numerele  $A = 3^{21} + 3^{21} + 3^{21}$ ,  $B = 8^{12} - 7 \cdot 8^{11}$  și  $C = 5^{45} - 3 \cdot 25^{22} + 14 \cdot 25^{21}$ .

a) Comparați numerele  $A$  și  $B$ . (justificați răspunsul)

b) Stabiliți dacă numerele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt *inteligente*. (justificați răspunsul)

**Soluție:** a)  $A = 3^{21} \cdot 3 = 3^{22} = (3^2)^{11} = 9^{11}$  .....2p

$B = 8^{11} \cdot (8 - 7) = 8^{11}$  .....2p

$A > B$  .....1p

b)  $A = 3^{21} \cdot 3 = (3^7)^3 \cdot 3$  nu este cub perfect deoarece este un produs dintre un număr cub perfect și un număr care nu este cub perfect, deci nu este număr *inteligent*.....5p

Ultima cifră a numărului  $B = 8^{11} = 2^{33}$  este 2, prin urmare numărul  $B$  nu este pătrat perfect, deci nu este număr *inteligent*.....5p

$C = 5^{45} - 3 \cdot 25^{22} + 14 \cdot 25^{21} = 5^{45} - 3 \cdot 5^{44} + 14 \cdot 5^{42} = 5^{42} \cdot (5^3 - 3 \cdot 5^2 + 14) = 5^{42} \cdot 64$  .....3p

$C = (5^{21} \cdot 8)^2$  care este pătrat perfect..... 3p

$C = (5^{14} \cdot 4)^3$  care este cub perfect..... 3p

$C$  este și pătrat perfect și cub perfect, prin urmare numărul  $C$  este număr *inteligent*..... 1p

**Problema 2** Veverița *Alvin* a mâncat în prima săptămână cu 25 alune mai puțin decât două cincimi din numărul de alune dintr-un sac. În a doua săptămână, ea a mâncat două cincimi din numărul alunelor rămase în sac. După cele două săptămâni, în sac au rămas două cincimi din numărul alunelor care erau la început. Câte alune a mâncat veverița *Alvin* în prima săptămână ?

**Soluție:** Notăm cu  $a$  numărul alunelor aflate inițial în sac.

În prima săptămână, *Alvin* a mâncat  $2a : 5 - 25$  alune.....3p

Notând cu  $b$  numărul alunelor rămase, obținem  $a - (2a : 5 - 25) = b \Rightarrow b = 3a : 5 + 25$  .....5p

În a doua săptămână, *Alvin* a mâncat  $2b : 5$  alune.....3p

După cele două săptămâni:  $b - 2b : 5 = 2a : 5$ , de unde  $3b = 2a$  .....5p

Avem  $3(3a : 5 + 25) = 2a \Rightarrow 9a + 375 = 10a \Rightarrow a = 375$  .....6p

Veverița *Alvin* a mâncat în prima săptămână 125 alune.....3p



**Problema 3.** Determinați toate numerele de forma  $\overline{xy}$  astfel încât  $\overline{xy} + \overline{yx} = \overline{abc}$  și numărul  $\overline{abc}$  dă restul 1 prin împărțirea la 5.

**Soluție:**  $\overline{abc} = \overline{xy} + \overline{yx} = 11(x + y)$  .....2p

$\overline{abc}$  dă restul 1 prin împărțirea la 5, prin urmare  $\overline{abc} = 5 \cdot k + 1$  are ultima cifră 1 sau 6, adică  $c \in \{1, 6\}$  .....2p

$11(x + y) \geq 100$  și  $11(x + y)$  are ultima cifră 1 sau 6  $\Rightarrow x + y = 11$  sau  $x + y = 16$  .....5p

Se obțin 11 soluții:  $\overline{xy} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 79, 83, 88, 92, 97\}$  .....11p

**Problema 4.** a) Putem alege semnele + și - astfel încât să aibă loc egalitatea :

$$2024 \pm 2023 \pm 2022 \pm \dots \pm 2 \pm 1 = 2025 ? \text{ (justificați răspunsul)}$$

b) Putem alege semnele + și - astfel încât să aibă loc egalitatea :

$$2024 \pm 2023 \pm 2022 \pm \dots \pm 2 \pm 1 = 2026 ? \text{ (justificați răspunsul)}$$

*Supliment Gazeta Matematică 9/2025 (enunț modificat)*

**Soluție:** a) În membrul stâng al egalității sunt 1012 termeni pari și 1012 termeni impari.....3p

Suma unui număr par de numere impare este număr par.....3p

Indiferent de alegerea semnelor, membrul stâng al egalității va fi un număr par, care nu poate fi egal cu 2025, deci nu este posibilă alegerea semnelor.....4p

b) Se observă că  $(a + 3) - (a + 2) - (a + 1) + a = 0$ , oricare ar fi  $a$  număr natural.....3p

$2024 + 2023 - 2022 + 1 = 2026$  .....3p

$2024 + 2023 - 2022 + (2021 - 2020 - 2019 + 2018) + \dots + (5 - 4 - 3 + 2) + 1 = 2026$ , prin urmare, este posibilă alegerea semnelor.....4p

**Soluție alternativă:** a) Suma și diferența a două numere au aceeași paritate.....3p

Membrul stâng al egalității are aceeași paritate cu a sumei  $S = 2024 + 2023 + 2022 + \dots + 2 + 1$  .....3p

$S = 1012 \cdot 2025$  care este număr par, prin urmare, membrul stâng va fi un număr par, care nu poate fi egal cu 2025, deci nu este posibilă alegerea semnelor.....4p

Oficiu.....10p

Punctajul maxim este **100 puncte**.